

Benoit Mandelbrot et la modélisation mathématique des risques financiers

Rama CONT



Benoit Mandelbrot, savant multidisciplinaire et inclassable, est surtout connu pour ses travaux sur la géométrie fractale et l'analyse multifractale, cadres conceptuels pour décrire et modéliser de nombreux objets mathématiques irréguliers, comme l'ensemble du plan complexe qui porte son nom. Certains seront donc surpris d'apprendre que Mandelbrot portait également un vif intérêt à la modélisation mathématique en finance : il s'intéressa très tôt dans sa carrière à l'étude statistique des données économiques et financières et fut à l'origine de nombreuses idées importantes et fécondes dans la modélisation statistique des risques financiers, sujet qui le passionna tout au long de sa vie. C'est que Benoit Mandelbrot était avant tout un penseur de la *rugosité* et un chasseur de la *régularité dans l'irrégularité*, ce qui le conduisit à s'intéresser aux phénomènes irréguliers de toute sorte, qu'ils fussent mathématiques, physiques, biologiques ou économiques. Il était donc inévitable que, tôt ou tard, il porte son intérêt à la modélisation des fluctuations boursières, dont l'irrégularité occupe bien souvent la une de nos journaux...

Ce sujet avait déjà suscité la curiosité des mathématiciens, à commencer par le français Louis Bachelier qui, dans sa thèse en 1900, proposa de modéliser les cours boursiers par un processus 'purement' aléatoire qui prit quelques années plus tard le nom de *mouvement Brownien* sous la plume d'Einstein. Dans ce modèle, les variations successives du prix d'une action sont représentées par des variables aléatoires indépendantes avec une distribution Gaussienne : l'évolution des cours boursiers y est modélisée comme un mouvement imprévisible mais *continu*, dont l'amplitude peut être caractérisée par l'écart-type, ou *volatilité*, des rendements journaliers, qui mesure l'ordre de grandeur des fluctuations typiques du prix sur une journée. Le modèle de Bachelier, repris par les économistes américains Markowitz et Samuelson dans les années 1950, fut le point de départ de la modélisation probabiliste des risques financiers.

A la recherche d'invariances d'échelle

Dès 1962, Benoît Mandelbrot, qui avait à sa disposition les ordinateurs d'IBM, son employeur à l'époque, se mit à analyser les propriétés statistiques de données financières, notamment les cours de matières premières comme le coton. Alors que l'économétrie de son temps se contentait d'étudier et de modéliser des variations hebdomadaires ou mensuelles de grandeurs économiques, Mandelbrot recherchait dans ces mêmes données des *d'invariances d'échelle* – des propriétés statistiques qui ne dépendent pas de la fréquence d'échantillonnage. La distribution des rendements journaliers est-elle semblable à la distribution des rendements hebdomadaires ou mensuels ? Si on en croit le modèle de Bachelier, la réponse est oui : par la propriété d'invariance d'échelle du mouvement Brownien, la variation d'un cours sur t jours a la même loi statistique, à un facteur \sqrt{t} près, que sa variation sur 1 jour : on dit aussi que le mouvement Brownien est *autosimilaire* avec un exposant d'autosimilarité 2. En s'appuyant de nouveau sur une étude statistique des prix de coton, Mandelbrot montre que cette « loi en \sqrt{t} » ne décrit pas correctement l'évolution des queues de distribution à travers les échelles de temps, et c'est en essayant de rendre compte de cette variation des propriétés des données financières avec l'échelle d'observation que Mandelbrot décerna deux phénomènes importants mais absents du modèle de Bachelier et ignorés jusque là dans la modélisation économétrique :

- la présence de *discontinuités*, correspondant à une chute brutale des cours boursiers, et son pendant statistique, une queue de distribution épaisse et non-Gaussienne des rendements : c'est ce qu'il appela *syndrome de Noé* par allusion au mythique déluge ;

- la persistance des variations boursières et leur concentration dans le temps, qu'il appela *syndrome de Joseph* : « Sept années d'abondance, sept années de vaches maigres ».

Ces « syndromes » devinrent les deux piliers de sa représentation des aléas boursiers.

Du hasard sage au hasard sauvage: le syndrome de Noé

Dans une série d'articles publiés à partir de 1962 (M 1962c, M 1963c M 1963e, 1967) Mandelbrot remarque que les prix boursiers présentent des *variations extrêmes* beaucoup plus fréquentes que ne le prédit une distribution Gaussienne. Mandelbrot qualifia ce comportement de « hasard sauvage » par opposition au comportement aléatoire continu et assez « sage » du mouvement Brownien. Dans sa célèbre étude sur les prix du coton (M 1963) qui parut dans le même recueil (Cootner 1964) que la traduction par Savage de la thèse de Bachelier, Mandelbrot nota que si le but est de quantifier le risque d'un portefeuille, ce ne sont pas les variations « typiques » qui comptent mais bien ces gains ou pertes spectaculaires, que l'écart type ne mesure pas et qui sont représentées par la queue de la distribution de probabilité des rendements.

En voici une illustration. Si l'on suppose une distribution Gaussienne pour les rendements journaliers, la probabilité qu'un rendement observé dévie de 4 écarts types de sa moyenne est inférieur à 0.01 %, soit un événement observé en moyenne une fois tous les 63 ans. En revanche, pour une distribution de Student avec 3 degrés de liberté (pour laquelle la probabilité d'observer une perte $> x$ décroît en $1/x^3$), de même écart type, la probabilité

d'observer des événements 4 fois l'écart type passe à 0.62 % soit, en moyenne, un événement observé deux fois par an. Les rendements journaliers de l'indice Dow Jones (Figure 1) sur les deux années 2007-2009 exhibent 16 observations dont l'amplitude dépasse 4 écarts types : cela donne une proportion de 0.78 %, un peu plus que la loi de Student avec 3 degrés de liberté et 100 fois plus que dans le cas gaussien!

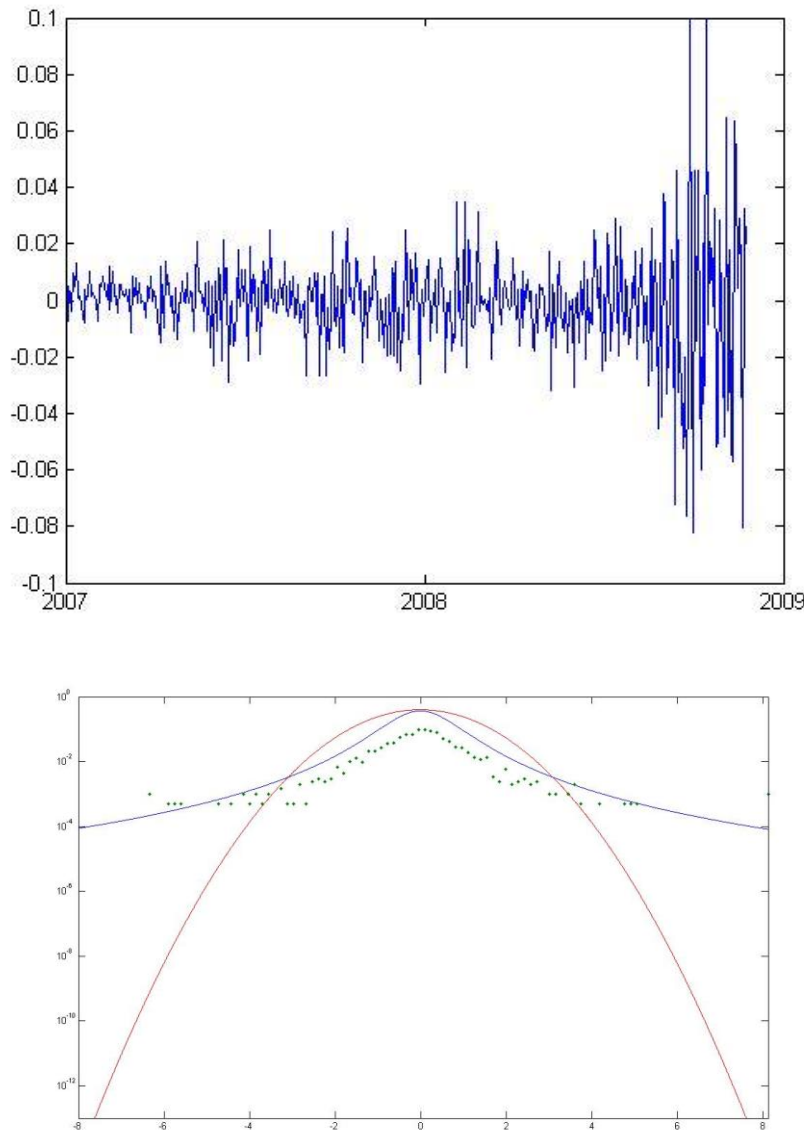


Figure 1 : En haut : rendements journaliers de l'indice Dow Jones 2007-2008 (points). En bas : Distribution normale (rouge) comparée avec la loi de Student de paramètre 3 (bleu) et la distribution (normalisée) des rendements journaliers de l'indice Dow Jones (points). Les trois distributions ont le même écart type et la même moyenne. L'unité sur l'axe horizontal correspond au nombre d'écart types.

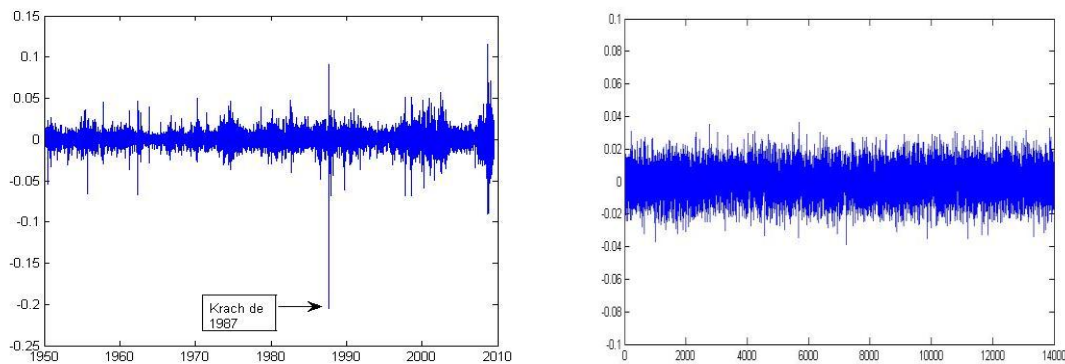


Figure 2. Gauche: Rendements journaliers de l'indice S&P500 de la bourse de New York, de janvier 1950 à Septembre 2009. La flèche indique le krach du Lundi 19 Octobre 1987, lorsque l'indice boursier SP500 perd 20% en une journée, ce qui correspond à 20 fois l'écart-type. Droite: simulation d'un « aléa sage », une série aléatoire gaussienne de même moyenne et même écart-type. La plus grande perte dans cette série de 14 000 observations est de 4 %, soit 4 fois l'écart-type.

Mandelbrot propose alors de remplacer le mouvement Brownien de Bachelier par une classe de processus aléatoires reflétant le caractère sauvage et discontinu des mouvements boursiers: les *processus de Lévy*, dont l'étude fut initiée dans les années 1930 par Paul Lévy, et qui, à l'opposé du mouvement Brownien, modélisent une évolution aléatoire discontinue, faite de sauts de toutes les tailles. Mandelbrot considéra initialement la classe des processus de Lévy stables, qui, comme le mouvement Brownien, sont autosimilaires mais avec un exposant d'autosimilarité $0 < \alpha < 2$: la diffusion « en \sqrt{t} » du mouvement Brownien est alors remplacé par un comportement en $t^{1/\alpha}$. Mandelbrot estima que la valeur α est proche de 1.7-1.8 pour de nombreuses séries financières (M 1963). La modélisation des prix avec des processus stables, dont la variance est infinie, fit l'objet de débats interminables chez les économètres dans les années 1960 mais eut du mal à percer dans les applications en finance qui reposait à l'époque sur la variance comme mesure du risque. Mais il existe bien d'autres constructions de processus de Lévy qui sont discontinus mais de variance finie et, après avoir été négligée pendant 30 ans, cette piste de recherche connut un renouveau dans les années 1990 et continue à stimuler de nouvelles recherches sur les processus de Lévy.

Persistence et concentration du risque: le syndrome de Joseph

Une autre contribution importante de Mandelbrot fut la mise en évidence- et la modélisation mathématique- des dépendances temporelles ou persistances dans les mouvements boursiers, qui se manifeste dans leur *concentration* dans le temps: « les petites variations sont le plus souvent suivi de petites variations, et les grandes mouvements sont le plus souvent suivi de grand mouvements » (M 1963). Cette propriété, qui se retrouve dans toutes les séries boursières, indique l'insuffisance de modèles à accroissements indépendants.

Une autre idée est celle de dépendance à longue portée: les rendements d'une action sur des jours différents, même éloignés dans le temps, peuvent présenter une dépendance

significative (1971a, 1971b, 1972) : c'est le *syndrome de Joseph*. Ces deux observations vont à l'encontre de l'hypothèse d'indépendance des variations boursières, sous-jacente au modèle de Bachelier. A partir de ses travaux antérieurs avec Van Ness sur la dépendance à longue portée en hydrologie (1968a, 1968b), Mandelbrot proposa de modéliser ce phénomène en remplaçant cette fois le mouvement Brownien de Bachelier par un autre processus aléatoire, le *mouvement Brownien fractionnaire*, dont les accroissements sont Gaussiens mais fortement dépendants même sur des périodes éloignées. Cette idée a généré des travaux de recherche considérables sur les processus aléatoires fractionnaires, notamment par Murad Taqqu qui fut élève de Mandelbrot, ainsi que des applications en économétrie et finance.

Ainsi, les différents modèles que proposaient Mandelbrot prédisent que la fréquence des grands risques est beaucoup plus grande que ne le suggère le modèle brownien, soit à cause de la discontinuité des prix dans le temps (syndrome de Noé), soit à cause de la concentration des pertes dans le temps (syndrome de Joseph). Evidemment, les deux effets peuvent coexister, ce qui fut confirmé par les centaines d'études économétriques qui suivirent les travaux de Mandelbrot. Dans ses travaux ultérieurs avec Laurent Calvet et Adlai Fisher (1997a, 1997b), Mandelbrot proposa de combiner ces deux effets au sein d'un modèle *multifractal*, revenant ainsi à un amour de jeunesse, les cascades aléatoires multifractales qu'il proposa en 1974 pour modéliser la turbulence des fluides (M 1974).

Mesurer l'irrégularité financière : l'analyse multifractale

Une idée importante chez Mandelbrot est l'existence d'une *échelle de la rugosité* dans les phénomènes irréguliers : il faut, pensait-il, « bien mesurer l'irrégularité » d'un phénomène pour choisir un modèle mathématique adéquat. On peut mesurer la régularité locale d'un signal $f(\cdot)$ à un instant t par son exposant de Hölder local $H(f, t)$ au voisinage de t . Pour des signaux irréguliers, cet exposant de Hölder peut varier d'un instant à l'autre et, lorsque le signal est aléatoire, chaque échantillon peut donner une fonction $H(t)$ différente. Une façon plus « stable » de caractériser l'irrégularité d'un signal est via son *spectre de Hölder*, défini comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points où l'exposant de Hölder atteint une valeur donnée :

$$D(f, h) = \dim(\{t > 0, H(f, t) = h\})$$

(avec la convention que $\dim(\emptyset) = -\infty$). Lorsque le signal est la trajectoire d'un processus aléatoire $X(t)$, $D(X, h)$ dépend a priori de la trajectoire observée mais pour de grandes classes de processus stochastiques – processus de diffusion, processus de Lévy et solutions d'équations différentielles stochastiques à coefficients réguliers – ce spectre ne dépend en fait que du support de la loi de X et permet donc de caractériser la 'texture' du processus. Par exemple, pour un signal 'monofractal' comme un mouvement Brownien

$$D(X, 1/2) = 1 \text{ et } D(X, h) = -\infty \text{ pour } h \neq 1/2$$

alors que pour des signaux 'multifractals', plus complexes, $D(X, \cdot)$ peut avoir un domaine non-trivial. Une idée clé, due à Parisi et Frisch (1985) et développée ensuite dans différentes

directions par Mandelbrot (1974), Arneodo et al (1993), Jaffard (1997) et d'autres, est qu'on peut, pour une grande classe de fonctions, estimer le spectre de Hölder à partir des moments empiriques des accroissements du signal à différentes échelles du temps. Mandelbrot comprit très tôt l'intérêt de ce *formalisme multifractal* dès les années 1970 dans le contexte de la modélisation statistique de la turbulence. Avec la disponibilité de données haute-fréquence de taux de change dans les années 1990, ces techniques permirent à Fisher, Calvet et Mandelbrot (1997c) de mettre en évidence un spectre de Hölder *concave* des signaux boursiers qui ressemble peu à celui des processus stochastiques –processus de diffusion, semimartingales- habituellement utilisés pour les représenter... et qui signale l'existence d'aléas de rugosité différentes à de multiples échelles de temps.

Reprenant l'idée, qu'il avait exploré dès 1967 (Mandelbrot & Taylor 1967), de représenter l'évolution d'un prix non pas en fonction du temps chronologique mais d'un temps 'intrinsèque' de marché, dont l'évolution est elle-même aléatoire et saccadée, Mandelbrot, Calvet et Fisher (1997a) modélisent ce temps intrinsèque par l'intégrale d'une mesure multifractale, ce qui aboutit à une représentation de la dynamique des prix par un mouvement Brownien avec un changement de temps multifractal.

Observer avant de modéliser

Ceux qui ont connu Benoit Mandelbrot savent l'importance qu'il attribuait au fait d'**observer avant de modéliser**. La simulation, la visualisation et l'analyse des données ont joué un rôle important, dans ses travaux sur la finance, comme dans ses travaux sur les fractales. Cet aspect de sa méthodologie est indissociable de ce qui fut son lieu de travail pendant de nombreuses années : le centre de recherche IBM à Yorktown Heights (New York), où il disposait des ordinateurs les plus puissants de son époque, et dont il fit manifestement bon usage. Mandelbrot passait une grande partie de son temps à *visualiser* les données, les observer sur l'écran d'ordinateur et les soumettre à de multiples cribles statistiques. Son regard perçant faisait le reste. Il n'hésitait pas à réexaminer les modèles proposés dans ses anciens articles à la lumière de nouvelles données, pour les réévaluer voire les rejeter. Rien de surprenant, dirait certains lecteurs, mais si cette précieuse habitude mérite d'être mentionnée, c'est qu'elle contraste avec une littérature foisonnante de « modèles mathématiques », notamment en économie et finance, qui prétendent modéliser une réalité qu'elles ne daignent pas d'examiner Mandelbrot, qui était pourtant sensible à l'élégance mathématique, restait sceptique sur les « mathématiques financières » qu'il voyait, à la différence d'une véritable modélisation, se développer comme une nouvelle scolastique où l'engouement pour certains outils mathématiques semblait primer sur l'observation et les questions de fond sur la nature du risque...

Accueil et postérité des travaux de Mandelbrot sur les risques financiers

Dire que les travaux de Benoit Mandelbrot sur les risques financiers n'ont pas laissé indifférents les spécialistes du sujet est un euphémisme. Accueillis au départ avec hostilité par les uns – notamment nombre d'économistes et représentants de la « finance académique » - et avec enthousiasme par les autres, notamment des praticiens de la finance et ceux qui comme lui étudiaient de près les données empiriques, les travaux de Benoit Mandelbrot sur la modélisation mathématique en finance continuent à inspirer les uns et les autres plus de 40 ans après leur publication.

L'hostilité de la réaction –notamment des représentants de la finance académique- à Mandelbrot était en partie due au fait qu'il avait choisi de s'attaquer aux paradigmes de la théorie financière d'alors: utilisation de la variance comme mesure de risque, représentation des aléas boursiers par des modèles Gaussiens ou des modèles à accroissements indépendants, pertinence du mouvement Brownien comme représentation de l'aléa boursier... Benoit Mandelbrot, qui a toujours eu un côté abrasif, aimait la polémique, exprimait ses critiques avec une franchise extrême et avait une certaine idée de sa personne, ce qui ne plaisait pas toujours. Dans les conférences d'économie des années 60 aux Etats Unis, jouant sur le nom de son employeur de l'époque, IBM, on parlait d'« ABM » (Anything But Mandelbrot)... Mais cette hostilité était aussi liée à sa position d'« outsider » à la fois chez les mathématiciens et les économistes, dans un monde académique qui aime bien filiations et références.

Que reste-t-il aujourd'hui des idées de Mandelbrot sur la modélisation des risques financiers ? Les modèles que Mandelbrot proposa initialement –processus alpha-stables, Brownien fractionnaires, cascade aléatoire multifractale- n'ont pas vraiment été retenus dans les applications économétriques et financières sous leur forme initiale. Dans ce domaine comme dans les autres, Mandelbrot s'intéressait plus au cadre conceptuel et laissait à d'autres le soin d'adapter ce cadre aux applications. Ce travail nécessita un effort considérable, l'élégance mathématique devant céder parfois devant la complexité des données financières. La modélisation initiale du « hasard sauvage » par les processus de Lévy alpha-stables céda progressivement la place dans les années 1990 à des processus de Lévy « stables tempérés », discontinus et encore quelque peu sauvages mais tout de même de variance finie...

Les idées de Mandelbrot sur la longue dépendance et le syndrome de Noé donnèrent naissance à une foisonnante littérature sur les modèles de volatilité à longue dépendance (voir par exemple Comte & Renault 1998, Cont 2005 et l'article de Murad Taqqu dans ce numéro). Quant aux processus multifractals de Mandelbrot, ils furent raffinés et développés dans les travaux de Calvet & Fisher (2001) et Bacry & Muzy (2010) dans la modélisation des données haute fréquence.

Mais, force est de constater que les idées directrices de Mandelbrot –importance des fluctuations extrêmes, discontinuité et concentration des risque financiers, dépendances temporelles dans la volatilité, l'importance d'examiner les données à de multiples échelles de temps- qui rencontrèrent une grande résistance de la part des économistes de son temps, sont aujourd'hui reconnues comme des faits incontestables, confirmés par plus de 40 ans de recherche en économétrie financière. Les objets mathématiques qu'il fit entrer avec tant de fracas dans l'univers de la théorie financière font désormais partie de la boîte à outils de la modélisation en économétrie et finance.

Dans la quête d'un modèle adéquat pour représenter l'aléa financier, Benoit Mandelbrot posa de nombreuses bonnes questions, dont certaines restent ouvertes. Ses idées, qui ont connu des extensions et ramifications multiples, continuent d'inspirer les chercheurs, dans ce domaine comme dans bien d'autres. Ce qui ne signifie pas nécessairement qu'ils soient appliqués dans la pratique quotidienne de la gestion des risques financiers... où beaucoup utilisent encore des modèles Gaussiens, pourtant mis en défaut à la fois par les études statistiques et par l'expérience des crises financières répétées de ces dernières décennies. Mais ceci est une autre histoire... Faudra-t-il attendre encore 30 ans pour que les gestionnaires de risque (et les formations de Master!) intègrent ces concepts ? Espérons que non.

Références :

BACHELIER, L. (1900) Théorie de la spéculation, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, Vol 17, 21-86.

BACRY, E., MUZY, J., and ARNEODO, A. (1993) Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis, *J. Statist. Phys.*, 70, pp. 635–674.

BACRY, E., MUZY, J. (2010) Multifractal models for asset prices., in: Cont, R. (ed.): *Encyclopedia of quantitative finance*, Wiley (2010).

CALVET, L. & FISHER, A. (2001) Forecasting multifractal volatility. *Journal of Econometrics* Vol 105, 27–58.

COMTE, F. & RENAULT, E. (1998) Long memory in continuous-time stochastic volatility models, *Mathematical Finance*, Vol 8, 4, 291–323.

CONT, R (2005) Long range dependence in financial markets in: Lévy Véhel, J. & Lutton, E. (eds): *Fractals in Engineering*, Springer, 159-179.

CONT, R & TANKOV, P (2003) *Financial modeling with jump processes*, CRC Press.

COOTNER, P. (ed.) : The random character of stock market prices, Cambridge : MIT Press, 1964.

FAMA, E.F. (1963) Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *The Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, pp. 420-429.

JAFFARD (1997) The multifractal formalism for functions, Part II: Self-similar functions, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 28, pp. 971–998.

PARISI, G. & FRISCH, U (1982) *Fully developed turbulence and intermittency*, in: Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics (Proc. Intl. Summer School Phys. Enrico Fermi), Ghil, M., ed., North Holland: Amsterdam, 1985, pp. 84–88.

Principaux travaux de Mandelbrot sur la modélisation en finance:

MANDELBROT, B. **Les objets fractals : Forme, hasard et dimension**, Seuil, Paris, 1982.

MANDELBROT, B. **Fractales, hasard et finance (1959 - 1997)**. Paris: Flammarion (Collection *Champs*), 1997.

MANDELBROT, B. & HUDSON, R. **Une approche fractales des marchés: risquer, perdre et gagner**, Paris: Odile Jacob, 2005.

MANDELBROT, B. 1962c. Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy. *Comptes Rendus* (Paris): **254**, 3968-3970.

MANDELBROT, B. 1963b. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business of the University of Chicago*: **36**, 394-419. Reproduit dans: Paul H. Cootner (1964) *The Random Character of Stock Market Prices* MIT Press.

MANDELBROT, B. 1963e. New methods in statistical economics. *The Journal of Political Economy*: **71**, 421-440.

MANDELBROT, B. 1966b. Forecasts of future prices, unbiased markets and “martingale” models. *The Journal of Business of the University of Chicago*: **39**, 242-255.

MANDELBROT, B. & Howard M. TAYLOR 1967. On the distribution of stock price differences. *Operations Research*: **15**, 1057-1062.

MANDELBROT, B. & James R. WALLIS (1968a) Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Resources Research*: **4**, 909-918.

MANDELBROT, B. & John W. VAN NESS (1968b). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SLAM Review*: **10**, 422-437

MANDELBROT, B.(1971a) Analysis of long-run dependence in economics: the R/S technique. *Econometrica*: **39**, 1971 (July Supplement), 68-69.

MANDELBROT, B. (1971b). When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random-walk and martingale models. *Review of Economics and Statistics*: **53**, 225-236.

MANDELBROT, B. (1972) Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*: **1**, 257-288.

MANDELBROT, B. (1973) Comments on “A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices.” by Peter K. Clark. *Econometrica*: **41**, 157-160.

MANDELBROT, B. (1974) Intermittent turbulence in self-similar cascades; divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*: **62**, 331-358.

MANDELBROT, B. L CALVET, & A FISHER (1997a) The multifractal model of asset returns. *Cowles Foundation Discussion Papers*: **1164**.

Laurent CALVET, Adlai FISHER, & MANDELBROT, B. (1997b) Large deviations and the distribution of price changes. *Cowles Foundation Discussion Papers*: **1165**.

A FISHER, L CALVET, & MANDELBROT, B. (1997c) Multifractality of the Deutschmark/US Dollar exchange rates. *Cowles Foundation Discussion Papers*: **1166**.

MANDELBROT, B. (2001) Stochastic volatility, power-laws and long memory. *Quantitative Finance*: **1**, 558-559.

MANDELBROT, B. (2003) Heavy tails in finance for independent or multifractal price increments. *Handbook on Heavy Tailed Distributions in Finance*, pages 1-34.

Auteur :

Rama CONT
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires,
CNRS- Université Pierre & Marie Curie (Paris VI).
Email : Rama.Cont@upmc.fr